

RELACIONES DE ORDEN. ÁLGEBRAS DE BOOLE

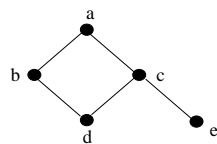
Relaciones de equivalencia

- 1) En el conjunto $|N \times N|$ se define la relación $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Averigua si es de equivalencia y si lo es calcula la clase del elemento $[(4, 8)]$.
- 2) En el conjunto $|N \times N|$ se define la relación $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Averigua si es de equivalencia y si lo es calcula la clase del elemento $[(2, 5)]$.
- 3) En $|R^2|$ se define la relación $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$. Comprueba que es de equivalencia y calcula el conjunto cociente.
- 4) En Z se define la relación: $x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Comprueba que es de equivalencia y calcula el conjunto cociente.
- 5) En $|R^2|$ se define la relación $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$. Comprueba que es de equivalencia y calcula el conjunto cociente.
- 6) En Q se define la relación: $x R y \Leftrightarrow \exists h \in Z / x = (3y + h) / 3$. Prueba que es de equivalencia. Razona si los elementos $2/3$ y $4/5$ pertenecen a la misma clase.

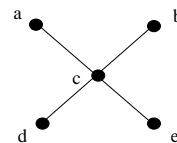
Relaciones de orden

- 1) Determina el orden lexicográfico de las siguientes cadenas de bits: 001, 111, 010, 011, 000 y 100 basado en el orden $0 \leq 1$. Dibujar el diagrama de Hasse de estas cadenas, ahora con el orden producto.
- 2) Sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Con respecto al orden lexicográfico basado en el orden usual " \leq ":
 - a) Encontrar todos los pares en $S \times S$ anteriores a $(2, 3)$.
 - b) Encontrar todos los pares en $S \times S$ posteriores a $(3, 1)$.
 - c) Dibujar el diagrama de Hasse de $(S \times S, \leq_{Lex})$.
- 3) Hallar los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo (si los hay) para los siguientes conjuntos con el orden dado por el diagrama de Hasse:

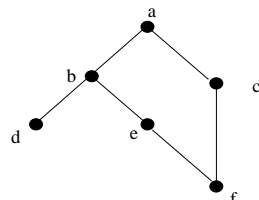
a)



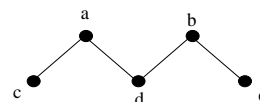
b)



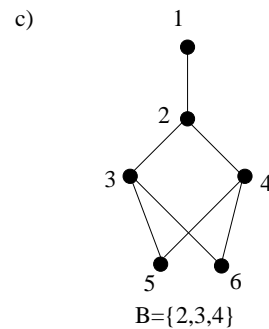
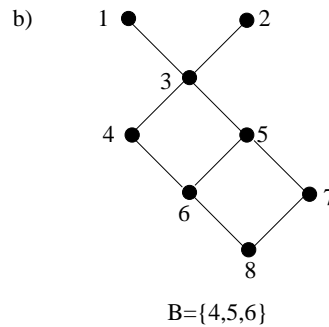
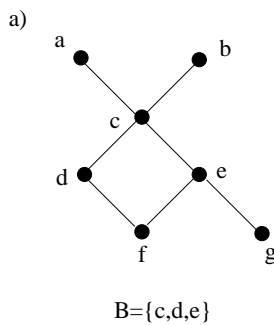
c)



d)



- 4) Hallar cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto B (si los hay) en cada uno de los siguientes casos:



5) Representar el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados y hallar los elementos notables de los subconjuntos señalados:

- a) $(D_{60}, |)$, $A = \{2, 5, 6, 10, 12, 30\}$ y $B = \{2, 3, 6, 10, 15, 30\}$
 b) $(D_{48}, |)$, $A = \{2, 4, 6, 12\}$ y $B = \{3, 6, 8, 16\}$
 c) $(D_{40}, |)$, $A = \{4, 5, 10\}$ y $B = \{2, 4, 8, 20\}$

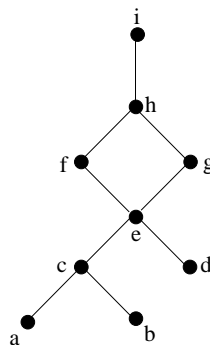
6) Hallar, si los hay, los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo para los siguientes conjuntos ordenados: $(P(X), \subset)$; $((0,1), \geq)$; $(|\mathbb{N}|, |)$; $(|\mathbb{N}-\{1\}|, |)$.

7) En cada uno de los casos siguientes, dígame si el conjunto X tiene o no una cota inferior, y si tiene alguna hállese su ínfimo si existe:

- a) $X = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 \leq 16\}$ b) $X = \{x \in \mathbb{Z}; x = 2y \text{ para algún } y \in \mathbb{Z}\}$ c) $X = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 \leq 100x\}$

8) Se considera en $D_{48} \times \mathbb{N}$ el orden lexicográfico correspondiente a tomar el orden divisibilidad en el primer factor y el orden usual en el segundo factor. Sea $S = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (6, 3), (6, 1), (4, 2)\}$. Se pide hallar, si existen, las cotas superiores e inferiores, elementos maximales y minimales, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de S .

9) Dado el orden parcial del siguiente diagrama de Hasse, obtener un orden total que lo contenga. ¿Cuántos pueden obtenerse?

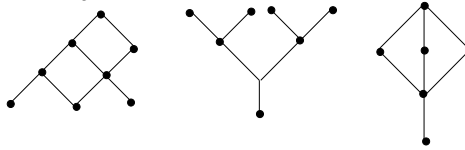


10) Sea $T = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ la lista de tareas para realizar un trabajo, de las que se sabe que unas preceden inmediatamente a otras de la siguiente forma: $f \leq a, f \leq d, e \leq b, c \leq f, e \leq c, b \leq f, e \leq g, g \leq f$. Hallar el orden parcial. ¿Qué tareas pueden realizarse independientemente? Construir un orden si el trabajo lo realiza sólo una persona.

11) En $(D_{10}, |) \times (D_{18}, |)$ se considera el orden lexicográfico. Hallar las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo, si existen, del subconjunto $S = \{(2, 2), (2, 3)\}$. Dibujar el diagrama de Hasse. Se define $f: D_{10} \times D_{18} \rightarrow D_{180}$ por $f(a, b) = ab$. ¿es f inyectiva?, ¿es suprayectiva?

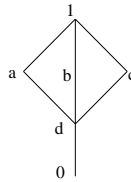
Retículos

- 1) Estudiar cuales de los siguientes conjuntos ordenados son retículos:



- 2) Obtener los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

- 3) Estudiar si en el siguiente retículo se verifica la siguiente igualdad: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$



- 4) Encontrar el complementario de cada elemento de D_{42} y D_{105} .

Álgebras de Boole

- 1) Expresar la operación conjunción en función de la disyunción y la complementaria. Expresar la disyunción en función de la conjunción y la complementaria.

- 2) Demostrar que en un álgebra de Boole se verifican las siguientes propiedades:

- $a \leq b \Leftrightarrow b' \leq a'$
- Si $a \leq b \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$
- Si $a \leq b \leq c \Rightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c) = b$
- $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$

- 3) Construir un isomorfismo entre $(P(C), \subset)$ y (B^n, \leq^n) para algún $n \in \mathbb{N}$, donde $C = \{1, 2, 3, 4\}$.

- 4) Sea (A, \leq) un álgebra de Boole ¿Cuántos elementos minimales tiene $A - \{0\}$, si A es un álgebra de Boole de 8 elementos? ¿Y si A tiene 16 elementos?

Expresiones booleanas

- 1) Halla la tabla de verdad de la función $f: B^2 \rightarrow B$ definida por la expresión $E(x, y) = (x \wedge y') \vee ((y \wedge (x' \vee y)))$.

- 2) Determina $S(f)$ para las funciones $f: B^3 \rightarrow B$ definidas por:

- $f(x, y, z) = x \wedge y$
- $f(x, y, z) = z'$
- $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee z'$

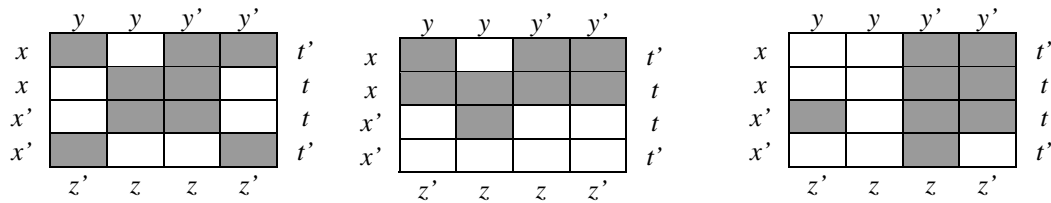
- 3) Determina todas las funciones booleanas binarias que cumplan: $f(a', b) = f(a, b') = (f(a, b))'$.

- 4) Dados los siguientes mapas de Karnaugh, escribe las expresiones booleanas que definen estos mapas:

	y	y	y'	y'
x				
x'				
	z'	z	z	z'

	y	y	y'	y'
x				
x'				
	z'	z	z	z'

	y	y	y'	y'
x				
x'				
	z'	z	z	z'



5) Se considera el conjunto

- a) $S(f) = \{(1,1,0,0), (1,1,1,1), (1,0,1,1), (1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,0,0), (0,1,0,1)\}$
 b) $S(f) = \{(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,0,0), (1,1,1,1), (1,0,1,0)\}$

Simplifica la expresión booleana de la función f que toma valor 1 en el conjunto $S(f)$ y cero en el resto, mediante el mapa de Karnaugh.

6) Completa los huecos de la tabla de la derecha, teniendo en cuenta que la expresión que se desea obtener ha de ser lo más sencilla posible. Determina esa expresión y dibuja el mapa de Karnaugh correspondiente.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	1
1	1	1	

7) Dada la función booleana $f: B^4 \rightarrow B$

$$f(x, y, z, t) = x y z t + x y' z t + x y z t' + x y' z t' + x' y' z' t' + x' y z' t' + x' y' z' t + x' y z' t$$

a) Utilizando las propiedades de un Álgebra de Boole demuestra que $f(x, y, z, t) = x z + x' z'$.

b) Verifica el resultado anterior utilizando los mapas de Karnaugh.

8) Simplifica al máximo las siguientes expresiones booleanas:

- a) $(x' + y)' + y' z$ b) $(x' y)' (x' + x y z')$ c) $x (x y' + x' y + y' z)$
 d) $(x + y)' (x y)'$ e) $y (x + y z)'$ f) $(x + y' z) (y + z')$

9) Utilizando el algoritmo de Quine-McCluskey halla la expresión booleana mínima de la función $f: B^5 \rightarrow B$ tal que

$$S(f) = \{(1,1,1,1,1), (1,1,1,0,1), (1,1,0,1,1), (1,0,1,1,1), (1,0,1,0,1), (1,0,0,1,1), (1,1,0,0,1), (1,0,0,0,1)\}$$

10) Encuentra la expresión más sencilla que detecte dentro del conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$ los números del conjunto:

- a) $A = \{\text{múltiplos de dos}\}$ b) $B = \{\text{múltiplos de tres}\}$ c) $C = \{\text{múltiplos de cuatro}\}$

11) Un examen de tipo test consta de 5 preguntas. Las respuestas correctas son:

$$1^a \rightarrow \text{Sí} \quad 2^a \rightarrow \text{No} \quad 3^a \rightarrow \text{Sí} \quad 4^a \rightarrow \text{Sí} \quad 5^a \rightarrow \text{No}$$

Construye una expresión booleana que analice cada examen y distinga los aprobados de los suspensos. Se considera aprobado si al menos tres respuestas son correctas.

12) Define una expresión booleana que compare, según el orden \leq , dos números del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ y simplificala.

13) Se considera un ascensor dotado de un dispositivo de seguridad, para que no puedan viajar niños pequeños solos ni pesos excesivos. Queremos que el ascensor se ponga en marcha cuando esté vacío o con pesos entre 25 y 300 kilos. Dotamos al ascensor de tres sensores: A sensible a cualquier peso, B sensible a pesos mayores de 25 kilos y C sensible a pesos superiores a 300 kilos. Diseña el circuito más sencillo posible que cumpla dichas condiciones.

14) En una reunión celebrada entre 12 países de la Comunidad Europea se acuerda aceptar las resoluciones aprobadas por la mayoría de los miembros.

España, Italia, Portugal y Grecia votan en bloque. Situación similar es la de Francia y Alemania. También hacen lo mismo Reino Unido e Irlanda por un lado y Bélgica, Holanda y Luxemburgo por otro. Dinamarca siempre vota lo contrario que Alemania y los tres países Bélgica, Holanda y Luxemburgo lo contrario que Irlanda. Encuentra los países que tienen mayor poder de decisión.

15) Para evitar errores de transmisión en ciertos mensajes codificados, es frecuente añadir un bit, llamado de control, a un bloque de bits. Así, por ejemplo, en la representación de cifras decimales mediante un código binario,

0 se representa como $a_4 a_3 a_2 a_1 c = 00001$

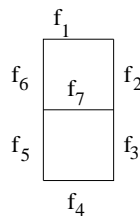
1 se representa como $a_4 a_3 a_2 a_1 c = 00010$

2 se representa como $a_4 a_3 a_2 a_1 c = 00100$

3 se representa como $a_4 a_3 a_2 a_1 c = 00111$

El bit de paridad c vale 1 si el número de unos del bloque es par y vale 0 en caso contrario. Define una expresión c que verifique lo anterior para los dígitos del 0 al 9 de manera que sea lo más simplificada posible en la forma suma de productos.

16) La aparición de una cifra decimal en el visor de una calculadora se produce mediante un circuito con cuatro entradas, que se corresponden con el código binario del dígito y siete salidas $\{f_i / i = 1..7\}$, que se presentan como pequeños segmentos, iluminados o no en el visor, según el siguiente esquema :



- Traza la tabla de verdad de cada una de las funciones booleanas $f_i: B^4 \rightarrow B$ que represente este fenómeno binario.
- Encuentra expresiones mínimas en forma de suma de productos para f_1 y f_2 .